

Recasages possibles : 209, 218, 239, 250, 261, 262, 266.

Référence : Analyse pour l'agrégation, ZUILY, QUEFFÉLEC, (p. 542-545); 40 dévs, BERNIS², (p. 207-215)

Développement Soient X_n (pour $n \in \mathbb{N}$) et X des variables aléatoires réelles, dont on note Φ_{X_n} et Φ_X les fonctions caractéristiques. On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues sur \mathbb{R} et telles que $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$.

Lemme 1 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

Théorème 2 (Lévy) $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi_X(t)$.

Proposition 3 On a $\Phi_X(0) = 1$. De plus, si X admet un moment d'ordre k , avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors Φ_X est de classe \mathcal{C}^k et on a $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

Proposition 4 Si X_1, \dots, X_n sont $\perp\!\!\!\perp$, alors $\Phi_{X_1+\dots+X_n} = \Phi_{X_1} \cdots \Phi_{X_n}$.

Théorème 5 (Théorème central limite) On suppose que les X_n sont indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d) et dans L^2 . On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) > 0$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Alors, on a

$$\sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Application 6 Soient $p, \alpha \in]0, 1[$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$. On note q le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors, l'intervalle suivant est un intervalle au niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$ du paramètre p :

$$\left[\overline{X_n} - q \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1 - \overline{X_n})}{n}}, \overline{X_n} + q \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1 - \overline{X_n})}{n}} \right].$$

donc l'implication réciproque : on suppose que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

et on fixe $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \geq A) \leq \varepsilon$. Un tel A existe car d'après les propriétés de la fonction de répartition d'une v.a.r,

$$\forall x > 0, \mathbb{P}(|X| \geq x) = \mathbb{P}(X \leq -x) + \mathbb{P}(X \geq x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Soit ψ la fonction sur \mathbb{R} qui vaut 1 sur $[-A, A]$, 0 sur $]-\infty, -2A] \cup [2A, +\infty[$ et affine sur $[-2A, -A]$ et sur $[A, 2A]$ (son graphe forme un trapèze). On a

$$\mathbb{E}[1 - \psi(X)] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{|X| \geq A}] = \mathbb{P}(|X| \geq A) \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)] &= \mathbb{E}[\varphi(X_n)(1 - \psi(X_n))] + \mathbb{E}[\varphi(X_n)\psi(X_n)] \\ &\quad - \mathbb{E}[\varphi(X)\psi(X)] - \mathbb{E}[\varphi(X)(1 - \psi(X))]. \end{aligned}$$

Or, si on note A_n la première espérance, on a

$$\begin{aligned} |A_n| = |\mathbb{E}[\varphi(X_n)(1 - \psi(X_n))]| &\leq \mathbb{E}[|\varphi(X_n)|(1 - \psi(X_n))] \\ &\leq \|\varphi\|_\infty (1 - \mathbb{E}[\psi(X_n)]). \end{aligned}$$

Ainsi, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |A_n| \leq \|\varphi\|_\infty (1 - \mathbb{E}[\psi(X)]) \leq \|\varphi\|_\infty \varepsilon$.

Par ailleurs, $\varphi\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ donc par hypothèse,

$$|\mathbb{E}[\varphi(X_n)\psi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)\psi(X)]| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Enfin $|\mathbb{E}[\varphi(X)(1 - \psi(X))]| \leq \|\varphi\|_\infty \mathbb{E}[1 - \psi(X)] = \|\varphi\|_\infty \varepsilon$, donc d'après l'inégalité triangulaire,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| \leq 2\varepsilon \|\varphi\|_\infty.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$, et le **Lemme 1** est prouvé.

- *Preuve du Lemme 1* : Rappelons d'abord la définition de la convergence en loi : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ si pour toute $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue bornée, $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$. Comme $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, l'implication directe du lemme est immédiate. Montrons

- *Preuve du Théorème 2* : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto e^{itx}$ est bien continue bornée sur \mathbb{R} donc si (X_n) converge en loi vers X , alors on a bien la convergence simple de Φ_{X_n} vers Φ_X . Réciproquement, supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_X(t)$. On commence par montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, alors on a bien convergence de $\mathbb{E}[\varphi(X_n)]$ vers $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Fixons donc $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et d'après la formule d'inversion de Fourier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant $\psi = \frac{\hat{\varphi}}{2\pi}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) e^{itx} dt = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{itx} dt.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X_n)] &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{itX_n} dt \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \mathbb{E}[e^{itX_n}] dt \quad \text{par Fubini} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \Phi_{X_n}(t) dt \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \Phi_X(t) dt \quad \text{par hypothèse + convergence dominée} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \mathbb{E}[e^{itX}] dt \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{itX} dt \right] \quad \text{par Fubini à nouveau} \\ &= \mathbb{E}[\varphi(X)]. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et fixons $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme, il existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| &\leq |\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X_n)]| + |\mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X_n)] - \mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X)]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| \\ &\leq |\mathbb{E}[(\varphi - \tilde{\varphi})(X_n)]| + |\mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X_n)] - \mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X)]| + |\mathbb{E}[(\tilde{\varphi} - \varphi)(X)]| \\ &\leq 2\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty + |\mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X_n)] - \mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X)]|. \end{aligned}$$

Or, comme $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, d'après le calcul précédent, pour n assez grand,

$$|\mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X_n)] - \mathbb{E}[\tilde{\varphi}(X)]| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour n assez grand, on a $|\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| \leq 3\varepsilon$, ce qui montre bien que $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\varphi(X)]$, et ceci étant valable pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, d'après le **Lemme 1**, on a bien convergence en loi de (X_n) vers X . Le **Théorème 2**, dit de Lévy, est donc prouvé.

- *Preuve de la proposition 3* : Tout d'abord, $\Phi_X(0) = \mathbb{E}[e^0] = \mathbb{E}[1] = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que X admet un moment d'ordre k , i.e que X^k est intégrable, ou encore que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |x|^k d\mathbb{P}_X(x)$ est finie. Posons pour $x, t \in \mathbb{R}$, $f(x, t) = e^{itx}$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est k -fois dérivable (car \mathcal{C}^∞) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) = i^k x^k e^{itx} \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) \right| \leq |x|^k.$$

Or, $x \mapsto |x|^k$ est intégrable (pour la mesure \mathbb{P}_X !) par hypothèse, donc d'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, Φ_X est de classe \mathcal{C}^k et on a

$$\Phi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} d\mathbb{P}_X(x).$$

En évaluant en 0, on obtient bien $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_X(x) = i^k \mathbb{E}[X^k]$, ce qui prouve la **Proposition 3**.

En particulier, on remarquera que si X est de carré intégrable, alors

$$\Phi_X'(0) = i\mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \Phi_X''(0) = -\mathbb{E}[X^2].$$

- *Preuve de la Proposition 4* : Soient X, Y deux v.a.r indépendantes intégrables, on va montrer que XY est intégrable et que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Comme $X \perp\!\!\!\perp Y$, on a $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|XY|] &= \iint_{\mathbb{R}^2} |xy| d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x||y| d\mathbb{P}_X(x) d\mathbb{P}_Y(y) \quad \text{par Fubini-Tonelli} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |y| d\mathbb{P}_Y(y) \right) \\ &= \mathbb{E}[|X|]\mathbb{E}[|Y|] < +\infty \end{aligned}$$

Ainsi, XY est bien intégrable et le théorème Fubini, grâce auquel on peut faire le même calcul que ci-dessus sans les valeurs absolues, donne $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

En particulier, si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $e^{itX} \perp\!\!\!\perp e^{itY}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] = \Phi_X(t) \Phi_Y(t).$$

Ce résultat se généralise immédiatement au cas de n v.a.r indépendantes par récurrence, ce qui achève la preuve de la **Proposition 4**.

- *Preuve du Théorème 5* : On se donne (X_n) une suite de v.a.r i.i.d et de carré intégrables. On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) > 0$. Quitte à changer $(X_n)_n$ en $\left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)_n$, on peut supposer les X_i centrées et réduites, i.e $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. On se ramène donc à montrer que, en posant $Y_n = \sqrt{n} \bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$, la suite $(Y_n)_n$ converge en loi vers une v.a Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. D'après le **Théorème 2** de Lévy, il suffit de montrer la convergence simples des fonctions caractéristiques. Rappelons que la fonction caractéristique de Z est donnée par $\Phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ (résultat que l'on obtient par plusieurs moyens : équation différentielle vérifiée par Φ_X ou théorème des résidus). Calculons la fonction caractéristique de Y_n : Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\begin{aligned} \Phi_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}[e^{itY_n}] = \mathbb{E}\left[e^{it \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}\right] \\ &= \Phi_{X_1 + \dots + X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &\stackrel{\text{II}}{=} \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdots \Phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{d'après la Proposition 4} \\ &= \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad \text{car les } X_i \text{ ont même loi.} \end{aligned}$$

Or, comme X_1 est de carré intégrable, i.e admet un moment d'ordre 2, d'après la **Proposition 3**, Φ_{X_1} est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on a $\Phi'_{X_1}(0) = i\mathbb{E}[X] = 0$ et $\Phi''_{X_1}(0) = -\mathbb{E}[X_1^2] = -\mathbb{V}(X_1) - \mathbb{E}[X_1]^2 = -1$. Ainsi, Φ_{X_1} admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la forme

$$\Phi_{X_1}(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Ainsi, puisque $\frac{t}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par ailleurs, puisque $\Phi_{X_1}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left| \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right| \leq \frac{1}{2}.$$

En particulier, cela assure que pour n assez grand, $\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \notin \mathbb{R}_-$, ce qui permet d'utiliser la détermination principale du logarithme complexe :

$$\begin{aligned} \Phi_{Y_n}(t) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n \text{Log}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

Or, Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, donc admet un développement limité au voisinage de 1. Or, pour x réel au voisinage de 1, on a

$$\text{Log}(1+x) = \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x).$$

Ainsi, par unicité du prolongement holomorphe, puisque tout voisinage dans \mathbb{R} de 1 admet un point d'accumulation (1 par exemple), on a pour z complexe

$$\text{Log}(1+z) \underset{z \rightarrow 0}{=} z + o(z).$$

Ainsi, $\Phi_{Y_n}(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-\frac{t^2}{2} + o(1)}$, donc par continuité de la fonction exponentielle,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{Y_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \Phi_Z(t).$$

Par conséquent, d'après le **Théorème 2** de Lévy, on a bien

$$Y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

ce qui conclut la preuve du **Théorème 5**, dit *Théorème central limite*.

- *Preuve de l'Application 6* : Soit $p \in]0, 1[$ inconnu. On se donne un risque $\alpha \in]0, 1[$, et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. D'après la loi forte des grands nombres, on a $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1] = p$. Ainsi, par continuité de l'application $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$, on a

$$\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \sqrt{p(1-p)},$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 1.$$

De plus, d'après le **Théorème 5** (TCL), on a

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi, d'après le lemme de Slutsky, on a finalement

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Notons $Y_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}$, et soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Comme la convergence en loi équivaut à la convergence simple des fonctions de répartition sur l'ensemble des points de continuité de la répartition limite, et puisque Z est à densité, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_Z(t)$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y_n \in [-t, t]) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(Z \in [-t, t]).$$

Posons q le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, i.e $q = F_Z^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$. Alors, par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(Z \in [-q, q]) = 1 - \alpha$. On a donc

$$\mathbb{P} \left(-q \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \leq q \right) = \mathbb{P} \left(\bar{X}_n - q \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \leq p \leq \bar{X}_n + q \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - \alpha.$$

On obtient bien que $\left[\bar{X}_n - q \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + q \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \right]$ est un intervalle de niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$ pour le paramètre p , ce qui conclut l'**Application 6**.

Répartition des items à prouver selon les leçons :

- Leçon 209 : items **1,2,5**
- Leçons 218, 239, 250 : items **2,3,5**
- Leçons 261, 262 : items **2,5,6**
- Leçon 266 : items **2,4,5**